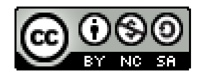
Présentation du résultat de mes recherches sur les nombres premiers

Le 22 Mars 2023 par Timothée Raso



I. Enoncé du résultat

1. Quelques pré-requis

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et P_n le nième nombre premier. Par définition, $P_1 = 2$

- Nous définissons l'ensemble ordonné (U,□) , infini, constitué de suites dont les termes sont à valeurs entières relatives.
  Soit $n \in \mathbb{N}^*$, notons U_n une partie de U avec U_1 □ U et U_{n+1} □ U_n.

  Nous allons définir U_n par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$:

  - Soit U_1 la première suite dont les termes sont à valeurs entières relatives. Soit $i \in \mathbb{Z}$, $U_{1,i}$ le ième terme de U_1, alors $U_{1,i} = i+2$

  - Soit $n > 1$, soit $i \in \mathbb{Z}$, tel que $U_{n,i}$ soit le ième terme de U_n.
    - $U_{n,0} = P_n$
    - $U_{n,i} = \min(\{U_{n-1,j},\ j \in \mathbb{Z}\} \setminus (\{U_{n,k},\ k \leq i-1\} \bigcup P_{n-1}*\{U_{n-1,j},\ j \in \mathbb{Z}\}))$

- On admettra les propriétés suivantes $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$:
  - $U_{n,-1} = 1$
  - $U_{n,-2} = -1$
  - $U_{n,-i} = -\ U_{n,i-3}$
  - $\forall\, s \in \mathbb{N}^*$ et $\forall\, i \in \mathbb{Z}$, si $P_s \mid U_{n,i}$ alors $s > (n-1)$

- On rappelle que □(X) correspond au nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à X.
- Soit m = $\sqrt{\prod_{l=1}^{n} Pl + Pn}$
- On appelle t ∈ ℕ* tel que $U_{n,t} \leq m$, et $U_{n,t+1} > m$
- Soit i ∈ $[0;t]$ et soit s ∈ $[0;i-1]$, on défini les suite T_i et T_s à valeur dans $\mathbb{N}^+$ telles que :

$$U_{n,Ti} \leq \frac{\prod_{l=1}^{n} Pl + Pn}{Un,i} < U_{n,Ti+1} \text{ et } U_{n,Ts} \leq \frac{Un,Ti}{Un,s} < U_{n,Ts+1}$$

2. Présentation du résultat final

En gardant les mêmes notations que vues précédemment pour t, T_i et T_s :

$$\sum_{k=n+1}^{\pi ¿¿} ¿$$

¿

$$\prod_{l=1}^{n} Pl * [\frac{\prod_{l=1}^{n}(Pl-1)}{2} ¿ +1] - \sum_{i=1}^{t} (Un,i) * ¿¿¿$$

Nous allons maintenant démontrer ce résultat.

II. Les propriétés des U_n et leur démonstrations

1. Propriété 1

Soit $i \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Si $P_n < U_{n,i} < P_n^2$ alors, $U_{n,i} = P_{n+i}$

Démonstration :

Soit $i \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $P_n < U_{n,i} < P_n^2$

Nous allons commencer par une démonstration par l'absurde pour montrer que $U_{n,i}$ est premier.

Nous montrerons ensuite que $U_{n,i} = P_{n+i}$

- ✓ Supposons donc que $U_{n,i} = k*P_m$ avec k et m deux entiers non nuls.

  On sait que $\forall$ s $\in \mathbb{N}^*$ et $\forall$ i $\in \mathbb{N}^*$, si $P_s \mid U_{n,i}$ alors $s > (n-1)$.

  On en déduit que $k \geq P_n$ et $P_m \geq P_n$. Donc $k*P_m \geq P_n^2$

  Or $k*P_m = U_{n,i}$ Donc $U_{n,i} \geq P_n^2$. Or on supposait $U_{n,i} < P_n^2$.

  Il y a donc contradiction.

  Donc si $P_n < U_{n,i} < P_n^2$, alors $U_{n,i}$ est premier.

- ✓ Montrons maintenant la proposition (P) suivante :

Soit $i \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$, si $P_n < U_{n,i} < P_n^2$, alors $U_{n,i} = P_{n+i}$

Procédons par une démonstration par récurrence sur $i \in \mathbb{N}^*$.

Initialisation :

Par définition si $i = 0$, $U_{n,0} = Pn$. Donc (P) est vrai au premier

rang.

Hérédité :

Supposons maintenant (P) et montrons que (P) est vrai au rang i+1, soit :

si $P_n < U_{n,i+1} < P_n^2$, alors $U_{n,i+1} = P_{n+i+1}$

Nous allons démontrer cela par l'absurde.

Ainsi, $U_{n,i} = P_{n+i}$ et selon la démonstration précédente,

si $P_n < U_{n,i+1} < P_n^2$, alors $U_{n,i+1}$ est premier.

Supposons que $\exists\, k \in \mathbb{N}^*$ tel que $k > n+i+1$ et $U_{n,i+1} = P_k$

Or par définition de U_n , $\exists\, j \in \mathbb{N}^*$ tel que, $U_{n,j} = P_{n+i+1}$.

Par ailleurs, $P_{n+i} < P_{n+i+1} < P_k$, et il n'existe aucun j tel que :

$U_{n,i} < U_{n,j} < U_{n,i+1}$

Il y a donc contradiction. Donc $n+i+1 \geq k$.

Or $U_{n,i} = P_{n+i}$ et $U_{n,i+1} = P_k$ et $U_{n,i} < U_{n,i+1}$.

Donc $P_{n+i} < P_k$ avec $n+i+1 \geq k \Leftrightarrow k = n+i+1$.

Conclusion :

On a donc démontré par l'absurde que pour $i \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$,

Si $P_n < U_{n,i} < P_n^2$, alors $U_{n,i}$ est premier et $U_{n,i} = P_{n+i}$.

2. Propriété 2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit $j \in$ ¿ et soit $i \in \mathbb{N}$,

Si $P_n*U_{n,j} < U_{n,i} < P_n*U_{n,j+1}$, alors $\exists$ $k \in \mathbb{N}$ tel que :

$U_{n,i} = U_{n+1,k}$ et $k = [i - (j+2)]$.

Démonstration :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on sait que $\forall$ $(i,s) \in (\mathbb{N}^*)^2$, si $P_s \mid U_{n+1,i}$ alors, $s > n$.

Soit $(i,s) \in (\mathbb{N}^*)^2$.

Si $P_n*U_{n,j} < U_{n,i} < P_n*U_{n,j+1}$, alors

$U_{n,j} < \frac{Un,i}{Pn} < U_{n,j+1}$.

Or il n'existe aucun $k \in \mathbb{N}$ tel que $U_{n,j} < U_{n,k} < U_{n,j+1}$.

Donc il n'existe aucun $k \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{Un,i}{Pn} = U_{n,k}$.

Ainsi, si $P_s \mid U_{n,i}$, alors $s > n$.

Or cela revient à la définition de U_{n+1}.

Donc $\exists$ $k \in \mathbb{N}$ tel que $U_{n,i} = U_{n+1,k}$.

Montrons maintenant par récurrence sur $j \in$ ¿ que :

$k = [i - (j+2)]$.

Initialisation :

Soit $(n,i) \in (\mathbb{N}^*)^2$

Si j = - 2, $U_{n,j} = -1$ et $U_{n,j+1} = 1$.

Donc si $P_n*U_{n,j} < U_{n,i} < P_n*U_{n,j+1}$, alors,

$\exists$ k $\in \mathbb{N}$ tel que $U_{n,i} = U_{n+1,k}$ et, $- P_n < U_{n,i} < P_n$.

Donc i = -1 ou i = -2 selon la définition de U_n.

Si i = -1, $U_{n,i} = 1 = U_{n+1,-1} = U_{n+1,\, i-(j+2)}$

Si i = -2, $U_{n,i} = -1 = U_{n+1,-2} = U_{n+1,\, i-(j+2)}$

Ainsi, si j = -2, on a montré que k = [i – (j+2)]

Donc la proposition est vraie au rang 1.

Hérédité :

Soit n $\in \mathbb{N}^*$ et (i,i',k,k') $\in \mathbb{N}^4$ et soit

(P_j) : Si $P_n*U_{n,j} < U_{n,i} < P_n*U_{n,j+1}$, et si $\exists$ k $\in \mathbb{N}$ tel que : $U_{n,i} = U_{n+1,k}$ alors, k = [i – (j+2)],

Montrons

(P_{j+1}) : Si $P_n*U_{n,j+1} < U_{n,i'} < P_n*U_{n,j+2}$, et si $\exists$ k' $\in \mathbb{N}$ tel que : $U_{n,i'} = U_{n+1,k'}$ alors, k' = [i' – (j+3)]

Soit i tel que P $P_n*U_{n,j} < U_{n,i} < P_n*U_{n,j+1}$ et $U_{n,i+1} = P_n*U_{n,j+1} < U_{n,i+2}$

Nécessairement, $U_{n,i+2} < P_n*U_{n,j+2}$

Posons, i'= i + 2.

Or, Si $P_n*U_{n,j+1} < U_{n,i'} < P_n*U_{n,j+2}$, on a montré que $\exists$ k' $\in \mathbb{N}$ tel que : $U_{n,i'} = U_{n+1,k'}$.

Ainsi, $U_{n,i'} = U_{n,i+2} = U_{n+1,k'}$.

Or $P_n \mid U_{n,i+1}$ donc $U_{n,i+1}$ n'appartient pas à U_{n+1}.

Aisni, si $U_{n,i} = U_{n+1,k}$, alors $U_{n,i+2} = U_{n+1,k+1} = U_{n+1,k'}$.

Or k = [i – (j+2)].

Donc $U_{n+1,k'} = U_{n+1,i-(j+2)+1} = U_{n+1,i+2-(j+3)}$

Or i' = i + 2.

Donc k' = [i' – (j+3)]

Conclusion :

On a donc montré par récurrence sur j ∈ ¿ que :

∀ n ∈ ℕ*, ∀ j ∈ ¿ et ∀ i ∈ ℕ,

Si $P_n*U_{n,j} < U_{n,i} < P_n*U_{n,j+1}$, alors ∃ k ∈ ℕ tel que :

$U_{n,i} = U_{n+1,k}$ et k = [i – (j+2)].

3. Propriété 3

∀ n ∈ ℕ*, ∀ (Z,t) ∈ $\mathbb{N}^2$, on note K(n) le produit { $\prod_{i=1}^{n}[Pi-1]$ } et L(n) le produit { $\prod_{i=1}^{n} Pi$ }, alors :

$U_{n,Z*K(n-1)+t} = Z*L(n-1) + U_{n,t}$

Démonstration :

Nous allons démontrer cette propriété par récurrence sur n ∈ ℕ*.

Initialisation :

Soit Z et t fixés. On postule que si t < 1, alors K(t) = L(t) = 0

Ainsi, si n=1 alors $U_{n,Z*K(n-1)+t} = U_{n,t}$

Donc la proposition est vraie au rang 1.

Hérédité :

Soit Z,Z' et t,t' fixés. ∀ n ∈ ℕ*, supposons (P_n) :

$U_{n,Z*K(n-1)+t} = Z*L(n-1) + U_{n,t}$

Montrons alors (P_{n+1}) :

$U_{n+1,Z'*K(n)+t'} = Z'*L(n) + U_{n+1,t'}$

Posons Z = Z'*(P_n – 1).

Ainsi, selon (P_n), $U_{n,\ Z'*(Pn - 1)*K(n-1) + t} = Z'*(P_n - 1)*L(n-1) + U_{n,t}$

Donc $U_{n,\ Z'*K(n) + t} = Z'*L(n) - Z'*L(n-1) + U_{n,t}$

Soit j ∈ ¿

Selon la propriété 2, Si $P_n*U_{n,j} < U_{n,\ Z'*K(n) + t} < P_n*U_{n,j+1}$, alors ∃ k ∈ ℕ tel que : $U_{n,\ Z'*K(n) + t} = U_{n+1,k}$ et k = [Z'*K(n) + t – (j+2)].

Dans le cas contraire, $U_{n,\ Z'*K(n) + t}$ n'appartient pas à la suite U_{n+1}.

On en déduit que :

$U_{n,\ Z'*K(n) + t} = Z'*L(n) - Z'*L(n-1) + U_{n,t} = U_{n+1,Z'*K(n) + t - (j+2)}$

On souhaite montrer que $U_{n+1,Z'*K(n) + t'} = Z'*L(n) + U_{n+1,t'}$

Il suffit donc de montrer que $U_{n+1,t - (j+2)} = U_{n,t} - Z'*L(n-1)$.

Or, par définition, $U_{n,-i} = - U_{n,i-3}$

Donc avec (P_n), $U_{n,t - Z'*K(n-1)} = -U_{n,Z'*K(n-1) - (t+3)}$

⇔ $U_{n,t - Z'*K(n-1)} = -[Z'*L(n-1) +U_{n,- (t+3)}]$

⇔ $U_{n,t - Z'*K(n-1)} = -[Z'*L(n-1)- U_{n,t}]$

⇔ $U_{n,t - Z'*K(n-1)} = U_{n,t} - Z'*L(n-1)$

Il faut donc montrer que $U_{n,t - Z'*K(n-1)} = U_{n+1,t - (j+2)}$

Par ailleurs, $U_{n,t - Z'*K(n-1)} = U_{n,t +Z'*K(n) - Z'*Pn*K(n-1)}$

⇔ $U_{n,t - Z'*K(n-1)} = U_{n,t +Z'*K(n)} - Z'*L(n)$

Ainsi, si $P_n*U_{n,j} < U_{n,\ Z'*K(n) + t} < P_n*U_{n,j+1}$, alors

$P_n*[U_{n,j} - Z'*L(n-1)] < U_{n,t - Z'*K(n-1)} < P_n*[U_{n,j+1} - Z'*L(n-1)]$

$\Leftrightarrow\ P_n*[U_{n,j- Z'*L(n-1)}] < U_{n,t - Z'*K(n-1)} < P_n*[U_{n,j+1- Z'*L(n-1)}]$

Ainsi, $\exists$ k' $\in \mathbb{N}$ tel que $U_{n,t - Z'*K(n-1)} = U_{n+1,k'}$ et,

k' = [t - Z'*K(n-1) – (j – Z'*K(n-1) +2)] = [t – (j+2)]

Donc $U_{n+1,t - (j+2)} = U_{n,t - Z'*K(n-1)}$

$\Leftrightarrow U_{n+1,t - (j+2)} = U_{n,t} - Z'*L(n-1)$.

Donc, $U_{n+1,Z'*K(n) + t - (j+2)} = Z'*L(n) + U_{n+1,t - (j+2)}$

Avec t' = t-(j+2), nous obtenons : $U_{n+1,Z'*K(n) + t'} = Z'*L(n) + U_{n+1,t'}$

Conclusion :

Nous avons donc démontré par récurrence sur n $\in \mathbb{N}^*$ que :

$\forall$ n $\in \mathbb{N}^*$, $\forall$ (Z,t) $\in \mathbb{N}^2$, si on note K(n) le produit { $\prod_{i=1}^{n} [Pi-1]$ }et L(n) le produit{ $\prod_{i=1}^{n} Pi$ }, alors :

$U_{n,Z*K(n-1) + t} = Z*L(n-1) + U_{n,t}$

4. Propriété 4

∀ n ∈ ℕ*, et avec les notations précédentes,

$$\sum_{i=1}^{K(n)+K(n-1)} Un,i = L(n)*[\frac{Pn*K(n-1)}{2} ¿ + 2] ¿$$

Afin de simplifier l'écriture notons $\sum_{i=1}^{K(n)+K(n-1)} Un,i = S$

<u>Démonstration :</u>

$$S = \sum_{i=1}^{K(n-1)} Un,i + \sum_{i=K(n-1)+1}^{K(n)} Un,i + \sum_{i=K(n)+1}^{K(n)+K(n-1)} Un,i$$

$$S = \sum_{i=K(n)+1}^{K(n)+K(n-1)} Un,(i-K(n)) + \sum_{i=K(n-1)+1}^{K(n)} Un,i + \sum_{i=K(n)+1}^{K(n)+K(n-1)} Un,i$$

$$S = \sum_{i=K(n)+1}^{K(n)+K(n-1)} Un,(i-K(n)) + \sum_{i=K(n-1)+1}^{K(n)+K(n-1)} Un,i - K(n)*L(n-1)$$

$$S = 2*S - [\sum_{i=1}^{K(n-1)} Un,i + \sum_{i=1}^{K(n)} Un,i + K(n)*L(n-1) ¿¿$$

$$S = \sum_{i=1}^{K(n-1)} Un,i + \sum_{i=1}^{K(n)} Un,i + K(n)*L(n-1)$$

$$S = \sum_{i=-K(n-1)}^{K(n-1)} Un,i + \sum_{i=-K(n)}^{K(n)} Un,i + K(n)*L(n-1) - ¿$$

Or, par définition, $U_{n,-i} = - U_{n,i-3}$

Donc,

$$S = \sum_{i=K(n-1)-2}^{K(n-1)} Un,i + \sum_{i=K(n)-2}^{K(n)} Un,i + K(n)*L(n-1) - ¿$$

Or selon la propriété 3, $U_{n,Z*K(n-1)+t} = Z*L(n-1) + U_{n,t}$

Ainsi,

$S = L(n-1)* [K(n) + 3 + 3*(P_n-1) + K(n-1) + 1 +$

$(P_n-1)*(K(n)+1)]$ – [$\sum_{i=1}^{K(n-1)} Un,i + \sum_{i=1}^{K(n)} Un,i$¿¿

S = L(n-1)* [K(n) + 3 + 3*(P_n-1) +K(n-1) + 1 +

$(P_n-1)*(K(n)+1)]$ – [$\sum_{i=1}^{K(n)+K(n-1)} Un,i - K(n)*L(n-1)$¿¿

2*S = L(n-1)*[K(n-1) + 2*K(n) + 1 +(P_n-1)*((P_n-1)*K(n-1) + 1) + 3 + 3*(P_n-1)]

2*S = L(n-1)*[K(n-1) + K(n-1)*(P_n+1)*(P_n-1) + 4*P_n]

2*S = L(n-1)*[K(n-1) + K(n-1)*(P_n^2 - 1) + 4*P_n]

2*S = L(n-1)*[K(n-1)*P_n^2 + 4*P_n]

Donc S = L(n)*[$\frac{K(n-1)*Pn}{2}+2$¿

Or S = $\sum_{i=1}^{K(n)+K(n-1)} Un,i$

<u>Conclusion :</u>

Nous avons donc montré que ∀ n ∈ ℕ*, et avec les notations précédentes,

$$\sum_{i=1}^{K(n)+K(n-1)} Un,i = L(n)*[\frac{Pn*K(n-1)}{2}\text{¿}+2]\text{¿}$$

5. Propriété 5

∀ n ∈ ℕ*, et avec les notations précédentes,

$$Pn * \sum_{i=0}^{K(n-1)-1} Un,i = L(n) * [\frac{K(n-1)}{2} \text{¿} + 1] \text{¿}$$

<u>Démonstration :</u>

On a montré que ∀ n ∈ ℕ*, et avec les notations précédentes,

$$\sum_{i=1}^{K(n)+K(n-1)} Un,i = L(n) * [\frac{Pn * K(n-1)}{2} \text{¿} + 2] \text{¿} = S$$

$$\Leftrightarrow S = \sum_{i=1}^{K(n-1)} Un,i + \sum_{i=1}^{K(n)} Un,i + K(n) * L(n-1)$$

$$\Leftrightarrow S = 2 * \sum_{i=1}^{K(n-1)} Un,i + \sum_{i=K(n-1)+1}^{K(n)} Un,i + K(n) * L(n-1)$$

Or $S = \sum_{i=1-K(n-1)}^{K(n)} Un,(i \text{¿} + K(n-1)) \text{¿}$

$$\Leftrightarrow S = \sum_{i=1-K(n-1)}^{K(n)} Un,i + Pn * K(n-1) * L(n-1)$$

Donc $Pn * K(n-1) * L(n-1) = 2 * \sum_{i=1}^{K(n-1)} Un,i - \sum_{i=1-K(n-1)}^{K(n-1)} Un,i + K(n) * L(n-1)$

$$\Leftrightarrow 2 * \sum_{i=1}^{K(n-1)} Un,i = \sum_{i=1-K(n-1)}^{K(n-1)} Un,i + K(n-1) * L(n-1)$$

$$\Leftrightarrow 2 * \sum_{i=1}^{K(n-1)} Un,i = \sum_{i=-K(n-1)}^{K(n-1)-1} Un,(i+1) + K(n-1) * L(n-1)$$

Or, par définition, $U_{n,-i} = - U_{n,i-3}$

Donc $2 * \sum_{i=1}^{K(n-1)} Un,i = \sum_{i=-K(n-1)-3}^{K(n-1)} Un,i + K(n-1) * L(n-1)$

$$\Leftrightarrow 2 * \sum_{i=1}^{K(n-1)} Un,i = L(n-1) * [K(n-1) + 4]$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{K(n-1)} Un,i = L(n-1)*[\text{¿}\frac{K(n-1)}{2}+2]\text{¿}$$

Or selon la propriété 3, $U_{n,K(n-1)} = L(n-1) + P_n$

Ainsi, $$\sum_{i=0}^{K(n-1)-1} Un,i = L(n-1)*[\text{¿}\frac{K(n-1)}{2}+1]\text{¿}$$

$$\Leftrightarrow P_n * \sum_{i=0}^{K(n-1)-1} Un,i = L(n)*[\text{¿}\frac{K(n-1)}{2}+1]\text{¿}$$

<u>Conclusion :</u>

Nous avons donc montré que ∀ n ∊ ℕ*, et avec les notations précédentes,

$$Pn * \sum_{i=0}^{K(n-1)-1} Un,i = L(n)*[\frac{K(n-1)}{2}\text{¿}+1]\text{¿}$$

Nous noterons S' = $Pn * \sum_{i=0}^{K(n-1)-1} Un,i$

III. Résultat final

On remarque que, selon la propriété 3,

$U_{n,K(n)+K(n-1)} = U_{n,Pn*K(n-1)} = L(n) + P_n$ que l'on notera T par la suite.

De plus $T = P_n*[L(n-1) + 1] = P_n*U_{n,K(n-1)-1}$

Ainsi, nous venons de montrer que ∀ n ∈ ℕ*, et avec les notations précédentes ainsi que celles énoncées en prérequis,

$$\sum_{i=1}^{K(n)+K(n-1)} Un,i = L(n)*[\frac{Pn*K(n-1)}{2} ¿ +2] ¿$$

Or cette somme est composée de 3 éléments distincts.

Ces éléments sont :

- $\sum_{i=n+1}^{\pi(T)} Pi$ que nous noterons τ
- S' $= L(n)*[\frac{K(n-1)}{2}+1]$
- La somme des $U_{n,i}$ non premiers et non multiples de Pn que nous noterons S''

Or selon les notations de la première partie, la somme de tous les $U_{n,i}$ non premiers et non multiples de Pn sont inclus dans la somme suivante : $\sum_{j=1}^{t} Un,j \sum_{k=j}^{T(j)} Un,k$

Mais certains $U_{n,i}$ sont présents plusieurs fois dans cette somme.

Il s’agit, toujours avec les notations du début, de la somme suivante : $\sum_{i=1}^{t} Un,i*¿\sum_{s=0}^{i-1} Un,s*\sum_{r=s}^{Ts} Un,r¿$

Nous pouvons donc écrire que :

S’’ = $\sum_{i=1}^{t} Un,i*¿¿$

Ainsi,

S = S’ + S’’ + τ

⇔ τ = S - S’ - S’’

Soit :

$$\sum_{i=n+1}^{\pi(T)} Pi = \sum_{i=1}^{K(n)+K(n-1)} Un,i - P(n)*\sum_{i=0}^{K(n-1)-1} Un,i - \sum_{i=1}^{t}(Un,i)*¿¿¿$$

⇔

$$\sum_{i=n+1}^{\pi(T)} Pi = L(n)*\left[\frac{Pn*K(n-1)}{2}+2\right] - L(n)*\left[\frac{K(n-1)}{2}+1\right] - \sum_{i=1}^{t}(Un,i)*¿¿$$

⇔

$$\sum_{i=n+1}^{\pi(T)} Pi = L(n)*\left[\frac{K(n)}{2}+1\right] - \sum_{i=1}^{t}(Un,i)*¿¿$$

Or selon les notations, $K(n)=\prod_{i=1}^{n}[Pi-1]$, $L(n)=\prod_{i=1}^{n} Pi$ et

$\pi(T)=\pi¿$

Pour finir, en remplaçant les notations, nous pouvons écrire :

$$\sum_{k=n+1}^{n¿¿} ¿$$

¿

$$\prod_{i=1}^{n} Pi * [\frac{\prod_{i=1}^{n} (Pi-1)}{2} ¿ +1] - \sum_{i=1}^{t} (Un, i) * ¿¿¿$$

Cela correspond au résultat final présenté au début.

Maintenant que cette formule est démontrée, intéressons nous à son intérêt.

IV. Intérêt de la formule présentée

- Dans un premier temps, il s'avère que, à ma connaissance, aucune formule n'existe encore permettant de donner la somme de nombres premiers sur un intervalle donné. En ce sens, cette formule est innovante.

- Dans un second temps, On remarque que la suite U_n pour un n donné est composée seulement de nombres premiers et de multiples d'éléments de cette suite.

  En prenant T pour limite, le nombre premier maximal à connaitre pour déterminer parfaitement

  τ est $P(\pi[\frac{T}{P(n+1)}])$

  Prenons un exemple :
  Si n = 4, P_4 = 7 alors $T=217\, donc \sqrt{T} \approx 14{,}73$
  Donc $U_{4,t}$ = 13
  $\frac{T}{P(5)} \approx 19{,}72$
  Donc $U_{4,T1}$ = 19

Ainsi,

$\sum_{k=5}^{\pi[217]} Pk$

=

$$210[\frac{48}{2}+1]-\sum_{i=1}^{2}(U4,i)*¿¿$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=5}^{\pi[217]} Pk=210\left[\frac{48}{2}+1\right]-11*(11+13+17+19)-13*13$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=5}^{\pi[217]} Pk=5250-660-169$$

Donc

$$\sum_{k=5}^{\pi[217]} Pk=4421$$

Résultat calculé manuellement et avéré correct.

V. Conclusion

Cette formule apparemment novatrice, est intéressante dans le sens où quelque soit n ∈ ℕ*, en connaissant les nombres premiers jusqu'à un certain nombre premier de rang r>n, on peut déterminer la somme des nombres premiers strictement supérieurs à n jusqu'à un nombre premier de rang R>r.

Avec :

- **R =** π¿

- **r =** $\pi\left[\frac{\prod_{i=1}^{n} Pi+Pn}{P\left(n+1\right)}\right]$